CUADERNILLO 4

EJEMPLAR DE CORTESÍA
NO APTO PARA

Nueva carpeta de Matemática III

Ruth Schaposchnik (coord.)
Luis Garaventa – Nora Legorburu
Patricia Rodas – Claudio Turano

Alumno/a

Curso

4. Sistemas de ecuaciones lineales 3
Revisión inicial 4
Ecuaciones simultáneas 5
Resolución de sistemas lineales 6
Método de igualación 6
Método de sustitución 7
Interpretación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 8
Sistemas equivalentes 9
Los sistemas de ecuaciones como herramienta para resolver problemas 11
Ecuación de una recta que pasa por dos puntos 13
Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales 14
En el mundo real 17
Sistemas en movimiento 17
Equilibrio en el mercado: entre la oferta y la demanda 18
Más actividades 19
Autoevaluación 22

AIQUE

Este CUADERNILLO 4 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática III.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Diego F. Barros

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu
Valeria Machiunas

COPIEDICIÓN
Claudia García

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Claudia María Bevacqua Arbet
Alejandra Valente

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Gabriel Lauría
Silvana López

ILUSTRACIONES
Alejandra Lunik
Diego Molina
Diego Stigliano

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupi en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Francisco Acuña de Figueroa 352 (C1180AAF)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0060-2
Primera edición - Primera reimpresión

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Nueva carpeta de matemática III / Nora Legorburu... [et.al.]. ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. 1a reimp. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2008.
200 p. ; 28x20 cm.

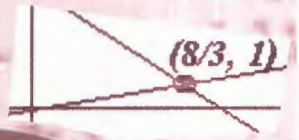
ISBN 978-987-06-0060-2

1. Matemática. I. Schaposchnik, Ruth, coord.

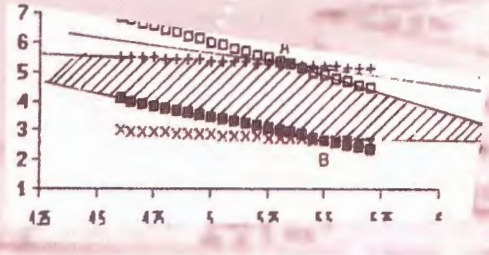
Esta edición se terminó de imprimir en Noviembre de 2008 en Latingráfica, Rocamora 4161, Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En muchas situaciones cotidianas, así como en problemas relacionados con otras disciplinas, se presenta la necesidad de averiguar dos o más incógnitas vinculadas entre sí por distintas relaciones que pueden expresarse mediante ecuaciones. Para resolver estos problemas, es muy útil plantear sistemas de ecuaciones, es decir, conjuntos de ecuaciones simultáneas en las que las incógnitas son comunes a más de una de ellas.



Me compré la revista con el CD a $12,90.
A mí me interesa el CD solo, ¿cuánto cuesta?
Me acuerdo de que costaba $2,90 más que la revista.



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscribitur, est in ordine Decimus.

● ¿Cuánto cuesta la revista, y cuánto, el CD?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Planteen una ecuación para cada una de las siguientes situaciones. Resuelvan las ecuaciones y respondan a las preguntas.

a) La suma de tres números naturales consecutivos da como resultado la suma entre el doble del primero y veinte. ¿De qué números se trata?

b) La diferencia entre el triplo de un número y doce es igual a la raíz cuadrada de doscientos veinticinco. ¿Cuál es el número?

c) El perímetro de un rectángulo es de 38 cm, uno de sus lados mide 5 cm menos que el otro. ¿Cuál es la superficie del rectángulo?

2 Representen gráficamente las rectas.

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$ b) $y = -3x + \frac{3}{2}$ c) $y = \frac{2}{3}x - 2$

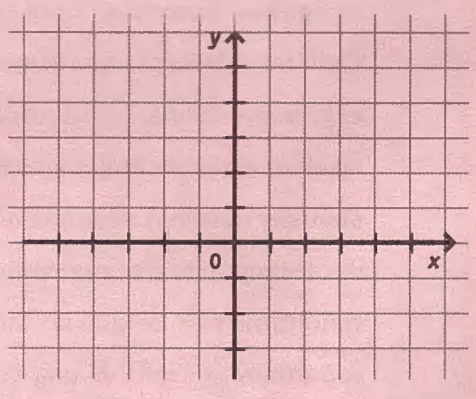
3 Consideren los puntos A = (1; 2); B = (4; 2); C = (2; –1) y D = (–2; 0).

a) Ubíquenlos en el plano cartesiano.

b) Calculen el perímetro del cuadrilátero ABCD (expresado en unidades del gráfico).

.....

.....



4 Entre las siguientes ecuaciones, averigüen cuáles tienen una única solución, cuáles tienen infinitas soluciones y cuáles no tienen solución.

a) $3x = 0$ c) $2(x - 1) = 2x + 5$ e) $4x - 7 = -x + 3$

b) $x - 2 = x + 3$ d) $x + 2 = \frac{3x + 6}{3}$ f) $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

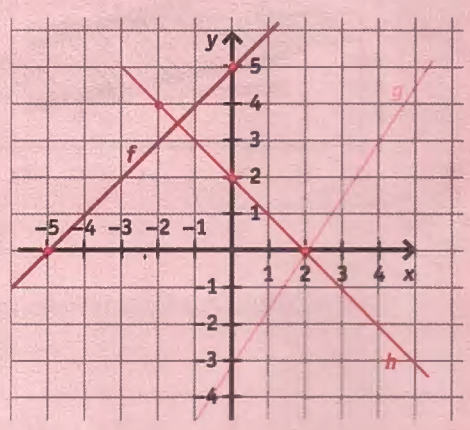
5 Una empresa telefónica cobra por sus servicios $15 de abono mensual más un cargo por el tiempo de comunicación a teléfonos celulares, a razón de $0,42 el minuto.

a) Escriban una fórmula que sirva para calcular la cantidad de dinero d que se debe pagar por mes en función del tiempo t (en minutos) de comunicación con teléfonos celulares.

b) ¿Cuánto dinero pagará un cliente en un mes en el que habló 46 minutos a celulares?

c) ¿Cuánto tiempo de comunicación a teléfonos celulares se le facturó a un abonado cuya factura fue de $43,98?

6 Escriban la ecuación de cada una de las rectas.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ecuaciones simultáneas

7 El cajero de un negocio quiere controlar la cantidad de billetes de $2 y de $5 que entregó durante el día.

a) Indiquen cuántos billetes de cada valor pudo haber entregado en cada una de las siguientes situaciones, si sólo utilizó billetes de estos valores.

I. Le pagó $20 a un proveedor.

.....

II. Dio un vuelto de $7.

.....

III. Pagó una cuenta de $13.

.....

IV. Dio un vuelto de $15.

.....

b) Analicen si las respuestas que dieron en el ítem **a)** son únicas, y expliquen cómo las obtuvieron.

.....

c) Si el cajero recuerda que, en la situación I, entregó 7 billetes en total, ¿cuántos billetes de cada valor pudo haber entregado?

.....

d) Analicen si la respuesta que dieron en el ítem **c)** es única, y expliquen cómo la obtuvieron.

.....

e) Para resolver el ítem **c)**, Paula escribió dos ecuaciones, pero dice que no sabe cómo hacer para resolver el problema usando las ecuaciones que escribió.
¿Qué representarán la x y la y que usó Paula? ¿Sirven estas ecuaciones para responder a la pregunta planteada?

$2 . x + 3 . y = 20$

$x + y = 7$

Para leer y recordar

- **Decimos que dos ecuaciones se consideran en forma *simultánea* cuando se supone que las letras que aparecen en ambas aluden a las mismas variables o incógnitas. Para indicar que dos ecuaciones se consideran simultáneas, se las agrupa con una llave.**
- **Dos ecuaciones lineales simultáneas conforman un *sistema de ecuaciones lineales*.**
- **Resolver un sistema es encontrar, cuando existan, los valores de las incógnitas que verifican las dos ecuaciones simultáneamente.**

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Resolución de sistemas lineales
Método de igualación

Para observar

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + 4y = 1 & \text{(I)} \\ -2x - 5y = -1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Hay diferentes métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Observen cómo podemos aplicar el llamado *método de igualación*.

ecuación (I)

$\frac{3}{2}x = 1 - 4y$

$x = (1 - 4y) \cdot \frac{2}{3}$

ecuación (II)

$-2x = -1 + 5y$

$x = (-1 + 5y) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

- Despejamos la misma variable de las dos ecuaciones; en este caso, elegimos despejar x.

$$(1 - 4y) \cdot \frac{2}{3} = (-1 + 5y) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

- Igualamos las expresiones que obtuvimos en el paso anterior.

$$\frac{2}{3} - \frac{8}{3}y = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}y$$

$$-\frac{8}{3}y + \frac{5}{2}y = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{6}y = -\frac{1}{6}$$

$$y = 1$$

- Resolvemos la ecuación y averiguamos y.

$$x = (1 - 4 \cdot 1) \cdot \frac{2}{3}$$

$$x = -2$$

- Hallamos el valor de x, reemplazando y en cualquiera de las dos expresiones del primer paso.

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(-2) + 4 \cdot 1 = 1 \checkmark \\ -2(-2) - 5 \cdot 1 = -1 \checkmark \end{cases}$$

- Verificamos que los valores obtenidos cumplan las ecuaciones originales del sistema.

Concluimos que la solución del sistema es: $x = -2$; $y = 1$. También lo expresamos así: $S = \{(-2; 1)\}$

8 Resuelvan con el método de igualación cada uno de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x - 2y = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}y = -1 \\ 5x - 2y = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4y - 3x = 13 \\ 2(x + y) - 3(x - y) = 8 \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Método de sustitución

Para observar

Otro de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones es el llamado *método de sustitución*. Vamos a aplicar este método para resolver el siguiente problema.

En una librería, Pablo compró dos lapiceras y tres marcadores, y pagó $19. Julián compró en el mismo negocio tres lapiceras y un marcador, y tuvo que pagar $18. ¿Cuánto cuesta cada lapicera y cada marcador?

Llamando x al precio de una lapicera, e y al precio de un marcador, podemos traducir al lenguaje algebraico la información dada mediante las siguientes ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \ \text{(I)} \\ 3x + y = 18 \ \text{(II)} \end{cases}$$

$y = 18 - 3x$ (III)
- Despejamos una de las variables de cualquiera de las dos ecuaciones; en este caso, despejamos y de la ecuación (II).

$2x + 3 \,.\, (18 - 3x) = 19$
- Sustituimos la expresión que obtuvimos en la otra ecuación. El problema queda reducido a la resolución de una sola ecuación con una sola incógnita.

$-7x = -35$

$x = 5$
- Resolvemos la ecuación y averiguamos x.

$y = 3$
- Reemplazamos en (III) el valor de x que obtuvimos y averiguamos y.

$\begin{cases} 2 \,.\, 5 + 3 \,.\, 3 = 19 \ \checkmark \\ 3 \,.\, 5 + 3 = 18 \ \checkmark \end{cases}$
- Para verificar las soluciones que obtuvimos, reemplazamos en las ecuaciones originales y corroboramos que se cumplan las dos igualdades.

Concluimos que la solución del sistema es: $x = 5$; $y = 3$ ó $S = \{(5\,;3)\}$.

9 Resuelvan por sustitución cada uno de los siguientes sistemas y comprueben las soluciones que obtengan.

a) $\begin{cases} \frac{3}{2}x + 4y = 1 \\ -2x - 5y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 10 = 3y \\ 5x + 6y = 25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 5y = -2 \\ -\frac{9}{2}y + 2x = 6 \end{cases}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Interpretación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

Para observar

- Cada una de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales puede asociarse a una función lineal, cuya representación gráfica es una recta. *Resolver* el sistema significa encontrar las coordenadas del punto que tienen en común ambas rectas (más adelante, veremos que puede ocurrir que este punto no exista o no sea único).

Ejemplo:

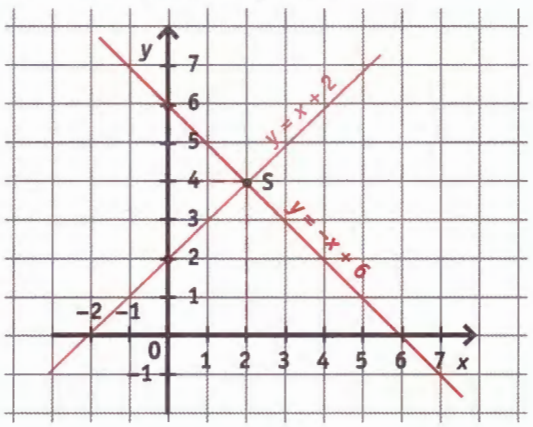
En el siguiente sistema, podemos obtener la fórmula de la función lineal asociada a cada ecuación, despejando la *y*.

$$\begin{cases} x + y = 6 \rightarrow y = 6 - x \\ x + y = 2 \rightarrow y = 2 + x \end{cases}$$

Aprovechando las expresiones que ya obtuvimos, resolvemos el sistema por igualación.

$$y = 6 - x \qquad y = 2 + x$$
$$6 - x = 2 + x$$
$$6 - 2 = x + x$$
$$4 = 2x$$
$$2 = x \qquad y = 4$$

Para representar gráficamente el sistema, graficamos las funciones asociadas a sus ecuaciones en un mismo diagrama de ejes cartesianos.



En el gráfico, pueden comprobar que $S = (2; 4)$ es el punto en el que se intersecan las rectas asociadas a las ecuaciones del sistema.

- Teniendo en cuenta que la representación gráfica está sujeta a las imprecisiones del dibujo, es importante corroborar que ella coincida con la solución obtenida algebraicamente.

10 Resuelvan los sistemas y verifiquen, en forma gráfica, la solución obtenida algebraicamente.

a) $\begin{cases} 2x + 2y - 14 = 0 \\ -y + \frac{x}{2} - 2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3}{2}x + y = \frac{7}{2} \\ \frac{4x + 8}{3} = 2y \end{cases}$

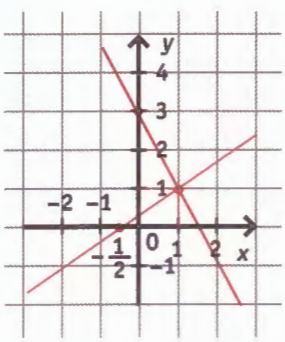
11 Escriban un sistema de ecuaciones que pueda asociarse a la siguiente interpretación gráfica.

.....

.....

.....

.....



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Sistemas equivalentes

Para leer y recordar

Se llaman *sistemas equivalentes* los sistemas de ecuaciones que tienen la misma solución.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad S = \{(3; -2)\}$$

$$\begin{cases} 3y - x = -9 \\ 2x + \frac{1}{2}y = 5 \end{cases} \qquad S = \{(3; -2)\}$$

Los sistemas son equivalentes.

12 Ana y María resolvieron los siguientes sistemas de ecuaciones. Ana dice que el **a)** y el **d)** son equivalentes, mientras que María afirma que los equivalentes son el **b)** y el **c)**.
Resuelvan los sistemas y comprueben quién tiene razón.

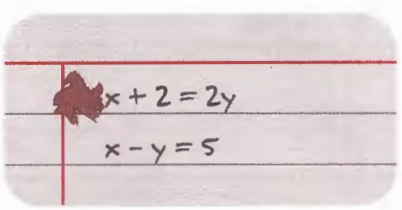
a) $\begin{cases} \frac{1}{3}x = 3y - 2 \\ -2x - y + 7 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5 = 3y \\ 7y + 11x = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x - \frac{5}{2}y = -5{,}5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (2x + 3y) : 2 = 5{,}5 \\ x - y = -2 \end{cases}$

13 A Victoria se le volcó el té sobre la tarea, y se le borroneó uno de los coeficientes de un sistema de ecuaciones, pero recuerda que $x = 4$ es parte de la solución. Calculen el coeficiente que está borroneado y resuelvan el sistema.



14 Calculen dos números enteros sabiendo que su suma es 36 y que su diferencia es 4.

.....

15 El promedio entre dos números es igual a 18, y la suma entre el triplo del primero y el segundo da como resultado 6. ¿De qué números se trata?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

16 Verifiquen, en cada caso, si el par ordenado indicado es solución del sistema. En caso de que no lo sea, hallen la solución.

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ $S = \{(3; 1)\}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 7y = 22 \\ 9x - y = 15 \end{cases}$ $S = \{(2; -3)\}$

c) $\begin{cases} -x = 5y + 8 \\ y = \frac{x}{4} - 11 \end{cases}$ $S = \{(28; 4)\}$

d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 1 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$ $S = \{(0; 0)\}$

17 Completen el segundo sistema con una ecuación conveniente, de modo que resulte equivalente al primero, y luego respondan.

$\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y = 6{,}5 \\ -x + 6y = 9y \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 9y = -x - \frac{9}{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

¿Es única la respuesta? ¿Por qué?

.....

18 Resuelvan, con el método que consideren más adecuado, los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 4x + 3(y - 2) = y + 6 \\ 5y - 6 = 3y - 2x \end{cases}$

.....

.....

.....

c) $\begin{cases} 2(y + 3) = x \\ y - 2 + 2x = 0 \end{cases}$

.....

.....

.....

b) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x + y}{3} = 1 \\ 5x + \frac{7}{2} = 4y - 2{,}5 \end{cases}$

.....

.....

.....

d) $\begin{cases} 9 - \frac{16}{5}x = y \\ y - \frac{4}{5}x = -1 \end{cases}$

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los sistemas de ecuaciones como herramienta para resolver problemas

Para observar

Para resolver una situación en la que intervienen varias incógnitas, en muchos casos, es conveniente traducirla al lenguaje algebraico. Para esto, se deben identificar las variables y hay que plantear un sistema cuyas ecuaciones reflejen las relaciones que existen entre ellas.
Observen el siguiente ejemplo.

Carlos, Juan Manuel y Silvio tienen una banda de rock, llamada *Los Decolorados*. Para el día de la Primavera, hicieron un minirrecital. Cobraron $4 la entrada a los menores de 12 años, y $9 a los mayores. Vendieron 88 entradas y recaudaron $667. En la boletería, olvidaron distinguir las entradas de mayores y las de menores vendidas. ¿Cuántas entradas de cada tipo se vendieron?

- **Las dos incógnitas son:**
  m: cantidad de mayores
  n: cantidad de menores
- **Las dos ecuaciones son:**
  Total de personas → $n + m = 88$
  Total recaudado → $4n + 9m = 667$

Este es el sistema por resolver.

Resolvemos el sistema y obtenemos $n = 25$ y $m = 63$.
Interpretamos que se vendieron 25 entradas de menores y 63 de mayores.

19 Con las treinta y cuatro monedas de 25 y 50 centavos que tenía ahorradas, María se compró una camisa que costaba $14. ¿Cuántas monedas de cada valor había en su alcancía?

.....

.....

20 Un trapecio isósceles tiene 35 cm^2 de superficie. Una de sus bases mide las tres cuartas partes de la otra, y su altura mide 5 cm. Calculen el perímetro del trapecio.

.....

.....

21 Brenda compró una bicicleta y un casco de ciclista por $108. Si el casco cuesta $72 menos que la bici, ¿cuál es el precio de cada artículo?

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

22 Una empresa de viajes y turismo cuenta con micros que trasladan 48 pasajeros sentados y con varios minibuses con capacidad para 12 pasajeros. La última vez que las 8 unidades viajaron completas, trasladaban 204 pasajeros. ¿Con cuántos micros y minibuses cuenta la empresa?

.....

.....

23 El entrenador del club Los Goleadores compró, en una tienda, 5 camisetas –todas del mismo precio– y 3 pelotas número cinco, y pagó $177. A la semana siguiente, regresó al mismo local para comprar 9 camisetas y dos pelotas más –ambos artículos iguales a los que ya había comprado– . En la caja, le hicieron un descuento del 15% por considerarlo cliente del negocio, y pagó $187.
¿Cuál es el precio de cada pelota y de cada camiseta?

.....

.....

24 Hallen la medida de los lados del romboide.

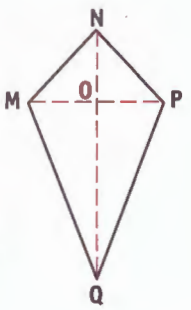
.....

.....

.....

$\overline{PQ} + \overline{MN} = 4{,}8$ cm

$2\overline{MN} = \overline{MQ} + 0{,}6$ cm



25 El perímetro de un rectángulo es de 38 cm, y uno de sus lados mide el doble que el otro, aumentado en 4 cm. Calculen la medida de sus lados y su diagonal.

.....

.....

26 Pedro le dice a Andrés: "Si sumás las dos cifras de un número, te da nueve como resultado; si invertís el orden, obtenés un número dieciocho unidades mayor que la mitad del primero". ¿A qué número se refiere Pedro?

27 Inventen un problema que pueda resolverse con cada uno de los siguientes sistemas y, luego, resuélvanlo en cada caso.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 2y = x + 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -2 \end{cases}$

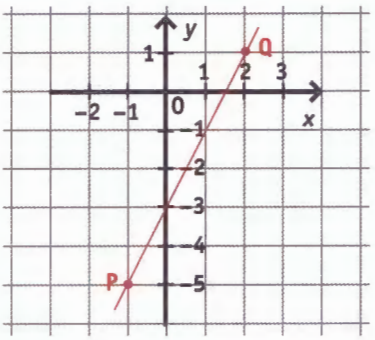
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ecuación de una recta que pasa por dos puntos

Para observar

Para obtener una ecuación de la recta que contiene los puntos P = (−1; −5) y Q = (2; 1), podemos pensar de la siguiente manera. Sabemos que la ecuación buscada es de la forma $y = mx + b$ (m es la pendiente, y b es la ordenada al origen de la recta). Para resolver el problema, debemos hallar los respectivos valores de m y de b de esta recta.

Teniendo en cuenta que P y Q son puntos del plano cuyas coordenadas verifican la ecuación $y = mx + b$, podemos plantear un sistema:



Para el punto P = (−1; −5) $\xrightarrow{x = -1;\ y = -5}$ $-5 = m \cdot (-1) + b$

Para el punto Q = (2; 1) $\xrightarrow{x = 2;\ y = 1}$ $1 = m \cdot 2 + b$

La solución de este sistema es $m = 2$, y $b = -3$. Es decir que la ecuación de la recta es:

$y = 2x - 3$.

28 Hallen la ecuación de la recta que pasa por cada par de puntos y representen la recta gráficamente.

a) $M = \left(\frac{5}{2}; 2\right)$ y $N = (-1; 0)$

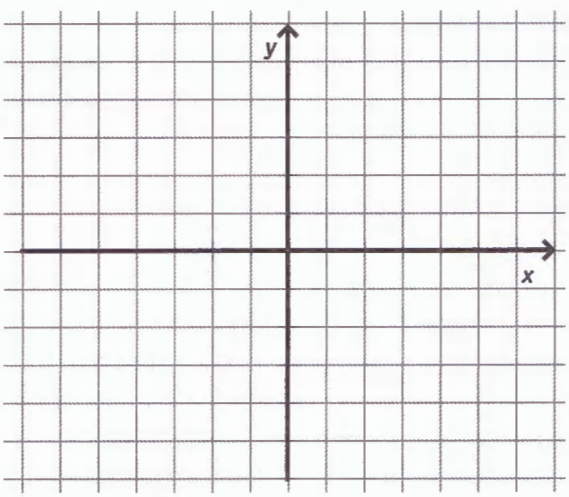
.....

.....

b) $R = (-3; -2)$ y $S = (1; 2)$

.....

.....



29 Los puntos A = (7; 6); B = (3; 2) y C = (7; 2) son los vértices de un triángulo.

a) Ubiquen los puntos en un plano cartesiano.

b) Tracen las rectas que contienen a los lados del triángulo y hallen la ecuación de cada una de ellas.

c) Clasifiquen al triángulo según sus lados y según sus ángulos.

30 Las rectas que incluyen a los lados de un cuadrilátero son las siguientes:

$R_1: y = 4$ $R_2: y = 3x - 5$ $R_3: y = 1$ $R_4: y = -3x + 25$

a) Representen las cuatro rectas en el mismo sistema cartesiano.

b) Averigüen las coordenadas de los vértices del cuadrilátero.

c) Clasifiquen el cuadrilátero y calculen su perímetro y su superficie. (Consideren que, en cada eje, cada unidad mide 1 cm).

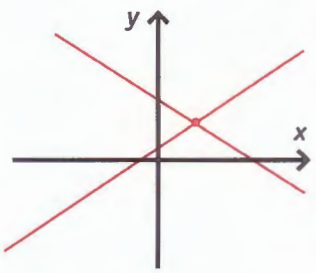
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Para leer y recordar

Cada vez que resolvamos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, y lo representemos gráficamente asociando una recta a cada una de las ecuaciones, nos encontraremos con alguno de estos tres casos. Es importante verificar, siempre, que la resolución algebraica y la interpretación gráfica guarden coherencia.

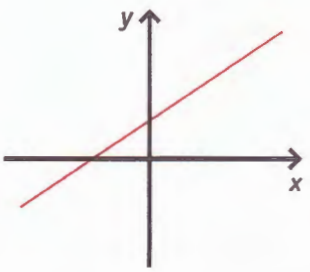
Sistema compatible determinado



Las rectas se cortan en un punto.

La solución es única.

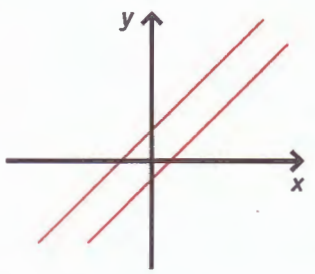
Sistema compatible indeterminado



Las dos ecuaciones están asociadas a la misma recta o, dicho de otro modo, a dos rectas que tienen infinitos puntos en común.

Tiene infinitas soluciones.

Sistema incompatible



Las rectas son paralelas y, por lo tanto, no tienen ningún punto en común.

El sistema no tiene solución.

31 Resuelvan, representen y clasifiquen los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 14 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = 58 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - \frac{y}{2} = 4{,}5 \\ -\frac{4}{3}x = -3 - \frac{y}{3} \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

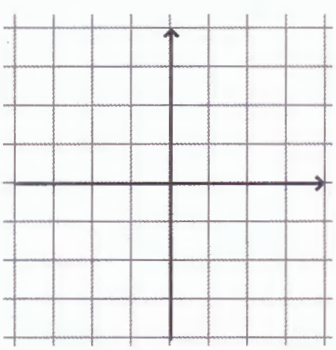
.....

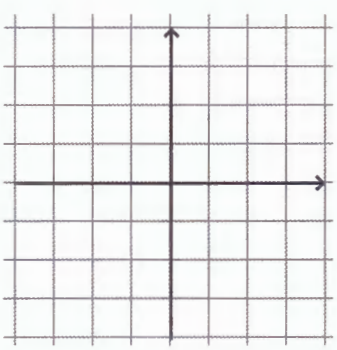
.....

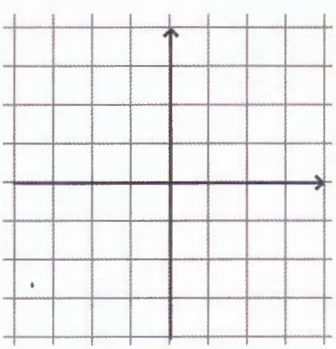
.....

.....

.....







© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

32 A los siguientes sistemas, les falta una ecuación. Completen cada sistema con una ecuación adecuada, de modo que resulte del tipo pedido en cada caso, y anoten su solución, cuando sea posible.

	Sistema compatible determinado	Sistema incompatible	Sistema compatible indeterminado
Sistema	$\begin{cases} -x + \frac{3}{4}y = 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = -1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$
Solución			

33 Calculen, en cada sistema, el coeficiente que falta, teniendo en cuenta la solución y/o la clasificación indicada.

a) $\begin{cases} 2(x+1) - 3(y-4) = 9{,}5 \\ \square\, x = 7 - 2y \end{cases}$

$S = \left\{\left(\frac{3}{4}; 2\right)\right\}$

b) $\begin{cases} -8x + \square\, y = 16 \\ x + 2y = -3x + 5y - 8 \end{cases}$

Sistema compatible indeterminado

c) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2(x+y) = 12 \\ 2y = -1 - \square\, x \end{cases}$

Sistema incompatible

.....

.....

.....

.....

34 Indiquen cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Expliquen sus respuestas.

a) En la interpretación gráfica de un sistema compatible indeterminado, las rectas pueden resultar perpendiculares.

.....

b) Los sistemas compatibles determinados tienen una única solución.

.....

c) Un sistema incompatible tiene infinitas soluciones.

.....

d) En la interpretación gráfica de un sistema compatible determinado, las rectas pueden resultar perpendiculares.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

35 En un barrio, hay un cine y un teatro que ofrecen espectáculos para toda la familia. La entrada general para el cine cuesta $12; y la entrada del teatro, $8 para los niños y $16 para los adultos. El domingo pasado, el cine recaudó $2240; y el teatro, $2400.

a) ¿Puede ser que ese día haya ido la misma cantidad de adultos y de niños a ambos espectáculos? ¿Por qué?

.....

.....

.....

b) El dueño del teatro dice que, aunque rebajó las entradas (hasta el día anterior, costaba $10 la de niños y $20 la de adultos), asistieron la misma cantidad de niños y de adultos que el sábado, en el que recaudó $4200. ¿Puede ser cierto lo que dijo el dueño del teatro?

.....

.....

.....

c) ¿Pudo haber asistido la misma cantidad de adultos y de niños a ambos espectáculos el sábado? ¿Por qué?

.....

.....

.....

36 A continuación, se presenta un enunciado y una serie de preguntas. Para cada pregunta, expresen la situación simbólicamente e indiquen si la respuesta es única.

Enunciado:
Pablo fue a comprar caramelos de $0,50 y chocolates de $2 para repartir en su cumpleaños.

Preguntas:

a) Si gastó $20 en total, ¿cuántos caramelos y cuántos chocolates compró?

.....

b) Si gastó $20 y compró 25 golosinas en total, ¿cuántos caramelos y cuántos chocolates compró?

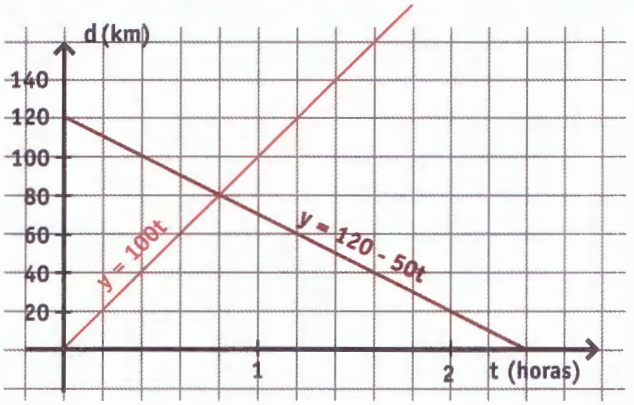
.....

c) Si gastó $20 y compró el doble de caramelos que de chocolates, ¿cuántos caramelos y cuántos chocolates compró?

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Sistemas en movimiento



Decimos que un móvil desarrolla un movimiento *uniforme* cuando se desplaza con *velocidad constante*. En estos casos, la velocidad es igual al cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en cualquier tramo. Por ejemplo, cuando decimos que un auto se desplaza a 100 km/h, significa que tarda 1 hora en recorrer cada tramo de 100 km.

Consideremos, como ejemplo, dos puntos A y B distantes entre sí 120 km, y dos autos que se desplazan a velocidad constante: uno parte de A hacia B a 100 km/h, y el otro, simultáneamente, parte de B hacia A a 50 km/h.

Las fórmulas que permiten expresar la distancia d (en kilómetros) a la que se encuentra del punto A cada uno de los autos en cada tiempo **t** (en horas) posterior a su partida son las siguientes.

Para el primero: $d_1 = 100\,t$. Para el segundo: $d_2 = 120 - 50\,t$.

Si queremos averiguar en qué momento y a qué distancia de A se cruzan, tenemos que hallar cuál es el punto del trayecto en el cual $d_1 = d_2$. Esto equivale a resolver el sistema de ecuaciones que vincula las trayectorias de los dos autos.

37 Resuelvan algebraicamente el sistema y verifiquen que la solución hallada coincida con la que se aprecia en el gráfico.

38 ¿Luego de cuánto tiempo de haber salido se produce el encuentro? ¿A qué distancia del punto A?

39 En la provincia de Buenos Aires, se encuentran las localidades de Navarro y Lobos, separadas entre sí por 26 km de distancia. Diego sale a las 8 de la mañana desde su casa en Navarro hacia Lobos, en bicicleta, a una velocidad constante de 6 km/h. A la misma hora, Hugo sale con su bicicleta de su casa en Lobos, a 7 km/h, en busca de Diego.

a) ¿A qué hora se encuentran?

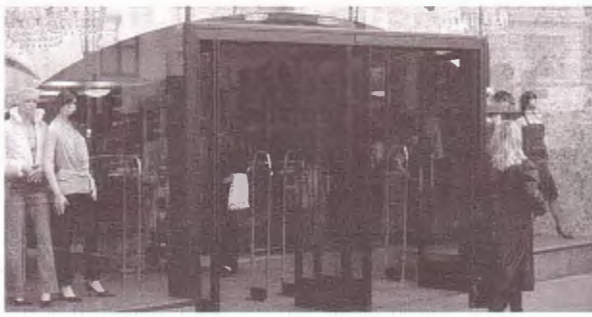
b) ¿A cuántos kilómetros de distancia de la casa de cada uno?

c) Ramiro vive en una estancia a 10 km de Lobos –si se va por el camino hacia Navarro– y salió a la misma hora que sus amigos en bicicleta, a 10 km/h, en dirección a Navarro. ¿A qué hora, se encuentra con alguno de sus amigos? ¿Con cuál de ellos?

d) ¿A cuántos kilómetros de distancia de Navarro se produce este encuentro?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Equilibrio en el mercado: entre la oferta y la demanda



Los economistas llaman *mercado* a un grupo de compradores y vendedores de un producto o de un servicio. Un *mercado competitivo* es el que incluye muchos compradores y vendedores, de modo que cada comprador sabe que puede elegir entre distintos vendedores.
En este contexto, la *demanda* es la cantidad de un producto que los compradores quieren y pueden comprar.

En el gráfico, pueden observar un ejemplo de cómo varía, para un cierto producto, la demanda de unidades en relación con el precio p al que se ofrecen (sin tener en cuenta otros numerosos factores que pudieran incidir): a medida que el precio del producto disminuye, la demanda aumenta. Es decir, cuanto más barato se ofrezca el producto, habrá más individuos dispuestos a comprarlo.
La *oferta* es la cantidad de un producto que los vendedores quieren y pueden vender. En analogía con el caso anterior, el gráfico muestra un ejemplo de cómo varía la oferta q en relación con el precio: en este caso, sucede lo contrario: cuando el precio aumenta, también aumenta la cantidad de unidades del producto que se ofrece a la venta.
Si existe *competencia pura* –es decir, si ninguno de los compradores o vendedores influye particularmente en la regulación del mercado–, cuando la cantidad de artículos que los vendedores ofrecen es igual a la cantidad de artículos que los consumidores están dispuestos a comprar, el mercado se encuentra *en equilibrio*, y el precio determinado de este modo se llama *precio de equilibrio*.

40 El departamento de ventas de una fábrica de ropa para adolescentes estimó que, mensualmente, puede vender 100 remeras a $12 cada una, y que la demanda varía en forma lineal en relación con el precio; de modo que si el precio fuera de $16, se venderían 80 remeras. Por otra parte, la gerencia de costos calculó que la función de oferta para este producto es $p = \frac{1}{9}q + 4$.

a) Encuentren la fórmula de la función demanda para las remeras.

b) ¿Cuál sería el precio de cada remera para que el mercado estuviera en equilibrio?

c) ¿Cuántas remeras se deberían vender al precio de equilibrio?

d) Representen, en un mismo sistema de ejes cartesianos, las funciones de demanda y oferta, y verifiquen con un gráfico la solución hallada algebraicamente.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

41 Resuelvan los sistemas, clasifíquenlos y represéntenlos gráficamente.

a) $\begin{cases} \frac{1}{3}y = x \\ y + 4 = 3x + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 0{,}2 + x \\ -y = 1 - x \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x + 2y = 6 \\ y + x = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{4}x = y + 2 \\ -2x - y - 7 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6\left(\frac{x+y}{3} - \frac{y-1}{4}\right) = x + 1 \\ 2(y - x) = 2y + 3 \end{cases}$

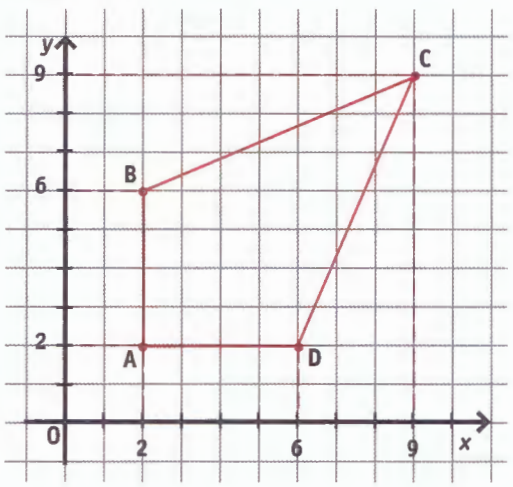
f) $\begin{cases} 3x - 2y = 4(x - y) + 8 \\ x - 5 + 3y = y + 3 - 2x \end{cases}$

42 Para el romboide de la figura, averigüen los siguientes datos (consideren que cada unidad mide 0,5 cm en cada eje).

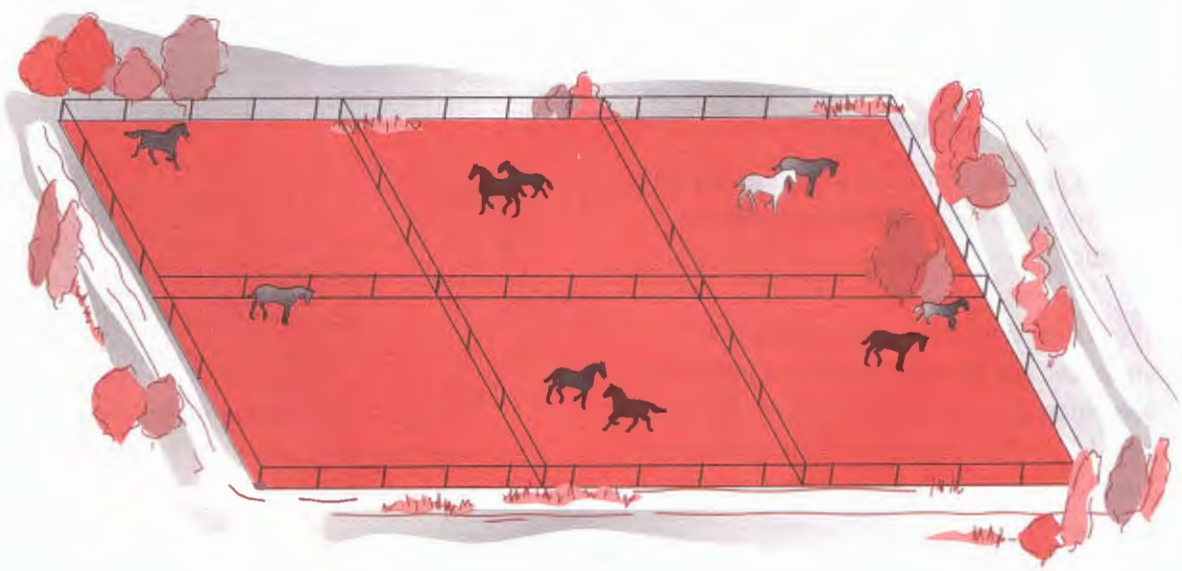
a) El perímetro y la superficie.

b) Las ecuaciones de las rectas que incluyen a cada uno de los lados.

c) Las coordenadas del punto de intersección entre las diagonales.



43 Un campo rectangular está bordeado con 396 m de alambre. Para organizar una exhibición de caballos, se subdividió el predio en parcelas iguales, como se observa en la figura. El alambrado total, incluida la subdivisión, es de 692 m. ¿Cuáles son las dimensiones del campo?



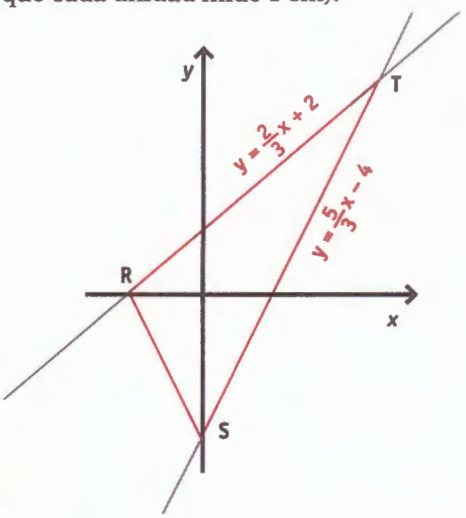
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

44 Hallen algebraicamente y verifiquen en el gráfico.

a) Las coordenadas de los vértices del triángulo.

b) La ecuación de la recta que contiene al lado RS.

c) El perímetro del triángulo. (Consideren que cada unidad mide 1 cm).



45 Consideren el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3\,(x-1) = 2y - 2 \\ 4kx + 2k = y \end{cases}$$

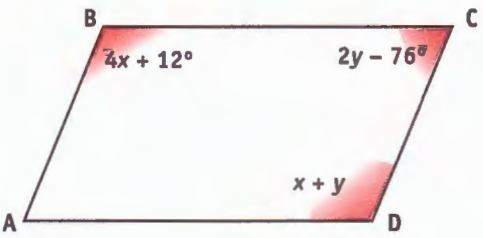
a) Determinen el valor de k para que las rectas sean perpendiculares.

b) Resuelvan el sistema y verifiquen gráficamente la solución obtenida en forma algebraica.

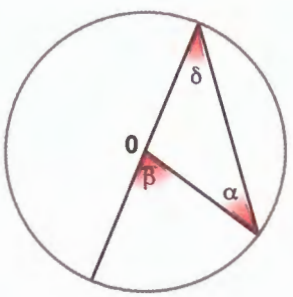
46 Darío tiene una colección de 1200 estampillas. Las de Europa y África juntas representan las dos terceras partes del total, pero las de Europa son 276 estampillas más que las de África. ¿Cuántas estampillas tiene de cada uno de estos continentes?

47 Dos lanchas, una de pasajeros y otra pesquera, salen del muelle en direcciones opuestas. Cuando están a 32 km de distancia, la lancha de pasajeros recorrió 2800 m menos que la lancha pesquera. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada lancha hasta ese momento?

48 Calculen la medida de los ángulos interiores del paralelogramo, teniendo en cuenta los datos que se dan en la figura.



49 Determinen la medida de $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\delta}$ tomando como referencia la figura y los datos que se dan.



$\hat{\alpha} = \hat{x} + 10°$

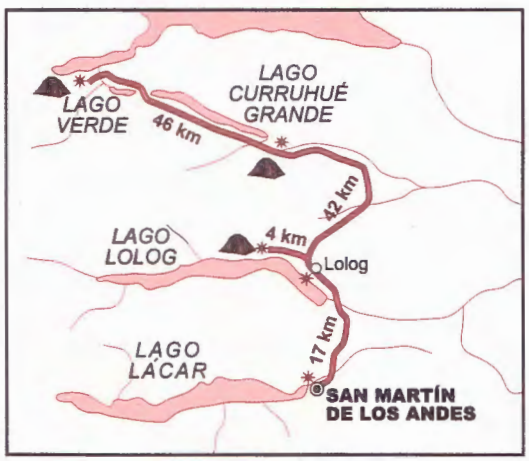
$\hat{\beta} = 2\hat{y} + 2\hat{x}$

$\hat{\delta} = \hat{y} + 40°$

50 Antonella y Julieta tienen una pila de figuritas cada una. Si Antonella le diera cuatro figuritas a Julieta, las dos tendrían la misma cantidad. ¿Cuántas figuritas tiene cada una si saben que el doble de la cantidad de Julieta supera, en una figurita, la cantidad que tiene Antonella?

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

51 Gisela está de vacaciones en San Martín de los Andes y quiere alquilar un auto para visitar los lagos Lolog, Curruhué Grande y Verde. En la agencia de autos de alquiler, le ofrecen dos alternativas: una es $50 por día con kilometraje ilimitado, y otra es $20 de cargo fijo más $0,40 por cada kilómetro que marque el cuentakilómetros del vehículo.



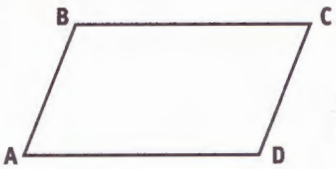
Tengan en cuenta las distancias que figuran en el croquis.

a) Analicen la conveniencia de cada modalidad de alquiler según los kilómetros que es preciso recorrer.

b) ¿Cuántos kilómetros tiene que recorrer en un día para que las dos alternativas le resulten iguales económicamente?

52 Patricio consiguió trabajo como vendedor de seguros y tiene que decidir cómo cobrará su salario. La empresa le ofrece dos alternativas de pago: una es cobrar el 8% de comisión sobre las pólizas que venda, y la otra consta de $200 mensuales más una comisión del 3% sobre las pólizas vendidas.
¿Cúal debe ser el monto mensual de ventas para que su sueldo sea el mismo con cualquiera de las dos opciones?

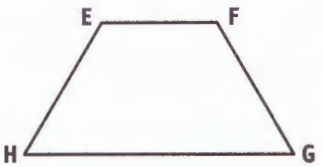
53 Calculen la medida de cada uno de los lados del paralelogramo.



$\overline{AD} = \overline{CD} + 1{,}8$ cm

Perím. = 17,2 cm

54 ¿Cuál es el área del trapecio isósceles?

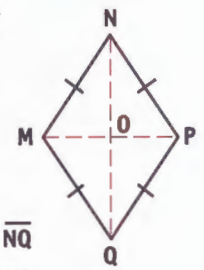


$\overline{EF} = \frac{7}{13}\overline{GH}$

$\overline{EF} + \overline{GH} = 20$ cm

Perím. = 30 cm

55 Calculen la medida de las diagonales, el perímetro y el área del rombo.



$2\overline{MP} + 4$ cm $= \overline{NQ}$

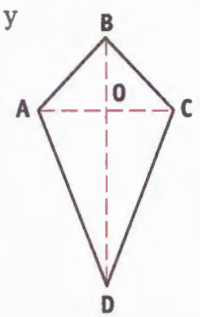
$\overline{MP} + \overline{NQ} = 34$ cm

56 Hallen la medida de las diagonales del rectángulo.

$\overline{RU} = \frac{1}{3}\overline{UT}$

Perím. = 32 cm

57 Calculen el perímetro y la superficie del romboide.



$\overline{AC} + \overline{BD} = 9$

$\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{BD}$

$\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BD}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

1 Resuelvan, representen gráficamente y clasifiquen los siguientes sistemas.

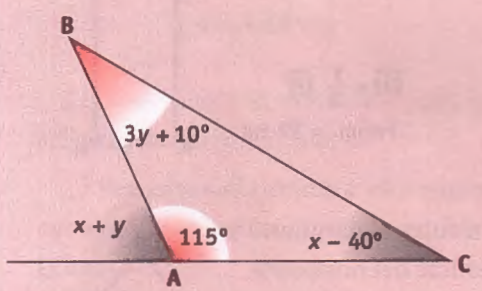
a) $\begin{cases} 5x + \frac{1}{3}y = x - 5 \\ 2(-x - y) = -7 + x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(x + 4 - 5y) = 2x + 3y + 14 \\ -y + 2x = y + 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ x - 4 = \frac{3}{2}y \end{cases}$

2 Don Alcides tiene dividido su campo en dos para criar ganado lanar: de un lado, están las ovejas; y del otro, las cabras. Si seis ovejas se pasaran para el lado de las cabras, en los dos sectores, quedaría la misma cantidad de animales. La última vez que las contó, notó que el triple de la cantidad de cabras es igual a la cantidad de ovejas, menos cuatro animales. ¿Cuántas cabras y cuántas ovejas tiene?

3 Calculen la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo, teniendo en cuenta la información que se da en la figura.



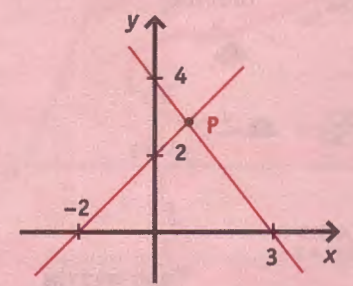
4 Si se aumentara la medida de la base de un rectángulo en un 30%, su perímetro sería de 164 cm. Si se aumentara la altura en un 50% (sin cambiar la medida de la base), el perímetro sería de 170 cm. Calculen las medidas de la base y la altura del rectángulo.

5 Dibujen un sistema cartesiano y marquen los puntos $R = (-\frac{1}{2}; 3)$ y $S = (2; -1)$.

a) Hallen la ecuación de la recta que contenga los puntos R y S.

b) Averigüen analíticamente si el punto $P = (1; 0{,}6)$ pertenece a la recta que hallaron y luego verifíquenlo en el gráfico.

6 Hallen las coordenadas del punto P.



7 Inventen un problema que pueda resolverse utilizando cada uno de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ x + y = 5 \end{cases}$

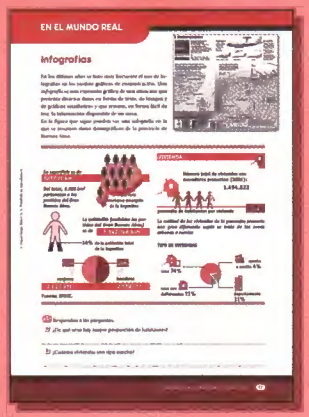
b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{3}{5}x + 1 \end{cases}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

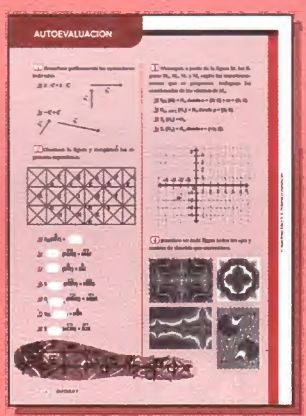
Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.

Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

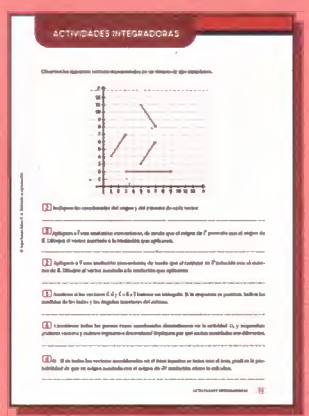


En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.

Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 5 y 7, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.

Para leer y recordar

Si n es un número natural:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factores}}$ $\qquad a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).

Para observar

Recordemos con algunos ejemplos cómo operamos con fracciones.

Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Este ícono indica que la actividad debe ser resuelta en una hoja aparte.

12

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE